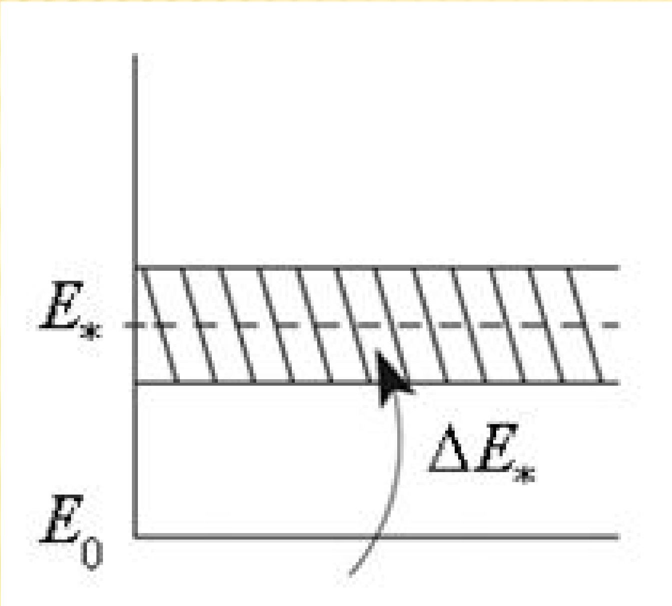
Лекция 11.
Эффект Мёссбауэра. Вероятность эффекта и его температурное поведение. Восстановление характеристик кристаллов по анализу вероятности эффекта в ранних системах.

Эффект Мессбауэра



$E_* \to \tau_* \to \delta E_* = \dfrac{\hbar}{\tau_*}$ конечная ширина, т.е. обязательно сообщить точно ΔE_*, а необходима энергия, попадающая в интервал шириной δE_* .

$\Delta E_* = \hbar\omega_*$ (это в основном γ -квант)

$$\begin{cases} E_* \sim 10^8 eV \\ \tau_* \sim 10^{-20} сек \end{cases}$$ - обычные ядерные реакции, τ_* - время, необходимое чтобы электрон пролетел через ядро

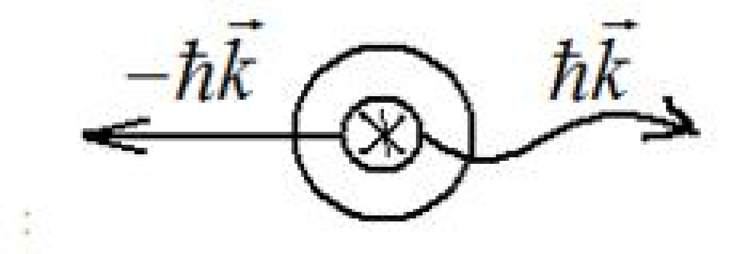
Существуют ядра, которые называются *изомерами* (это изотопы определенных химических элементов, у которых существуют долгоживущие возбужденные состояния), такие что $\begin{cases} E_*^{(i)} \sim 10^5 eV \\ \tau_*^{(i)} \sim 10^{-8} сек \end{cases}$

$\downarrow$

гигантское уменьшение ширины уровня δE_*.

$\rightarrow$ т.е. нужно подбирать ΔE_* на несколько порядков точнее.

Пусть имеется возбужденное ядро (покоящееся)



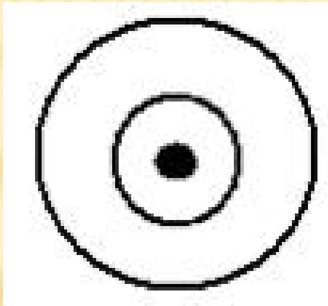
испускание гамма-кванта

импульс отдачи

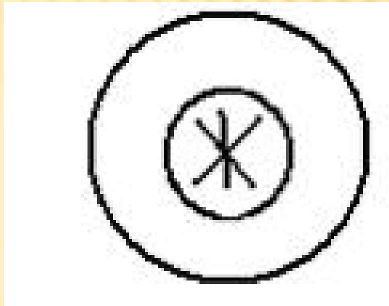
$(\hbar\omega_* - R)$ -энергия кванта (!)

Энергия отдачи: $R = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2M}$

$\xrightarrow{\hbar\omega_*}$



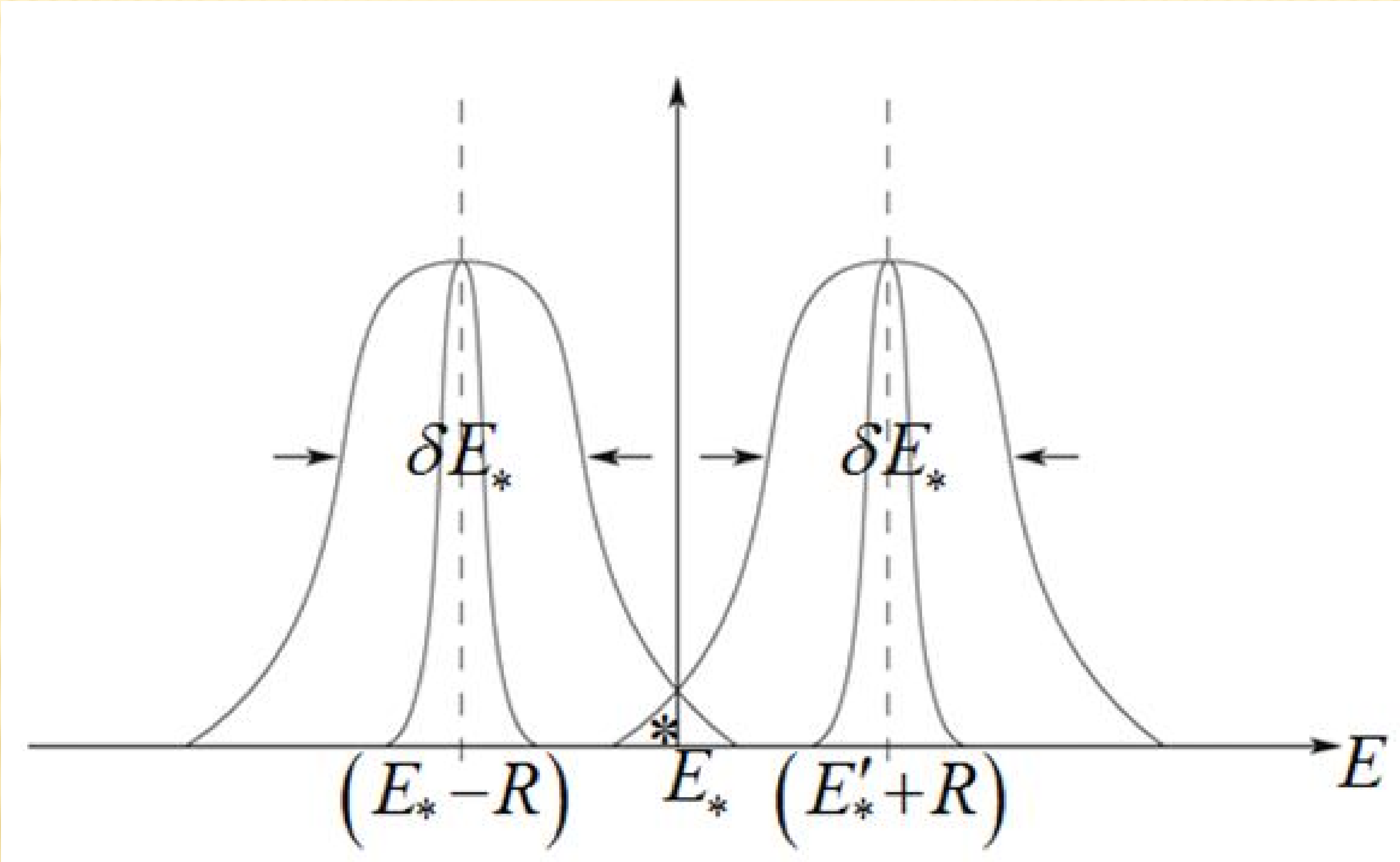
$\rightarrow$



$$\underbrace{\xrightarrow{\hbar\vec{k}}}_{R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}}$$

Покоящееся ядро в основном состоянии.

Т.о. квант с энергией $(\hbar\omega_* - R)$ не может быть поглощен ядром.



Интенсивность заведомо поглощаемых квантов.

Только в этой области(*) квант, испущенный одним ядром, может быть поглощен другим.

Для изомеров

$$\delta E_* \sim \frac{\hbar}{\tau_*} \sim \frac{10^{-27}}{10^{-8}} \sim 10^{-19}\,\textit{эрг} \Big/ 1{,}6 \cdot 10^{-12}\,\frac{\textit{эрг}}{eV} \sim 10^{-7}\,eV$$

$$R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = \frac{(\hbar k c)^2}{2Mc^2} = \frac{(E_*)^2}{2Mc^2}$$

$$R \sim \frac{\left(10^4\,eV\right)^2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}{10^{-27} \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{20}} \sim \frac{10^8}{10^{11}} \sim 10^{-3}\,eV$$

Тогда $\dfrac{\delta E_*}{R} \sim \dfrac{10^{-7}}{10^{-3}} \sim 10^{-4}$, следовательно, картинка другая и линии не пересекаются никогда.

Добротность ядра-изомера $\dfrac{\delta E_*}{E_*} \sim 10^{-11}$.

Если «заставить» ядро – испускатель или ядро – поглотитель двигаться, то в силу эффекта Доплера можно «сдвинуть» линии.

$$\triangle\hbar\omega \sim \frac{V}{c}(\hbar\omega) \sim 2R$$

$$\frac{V}{c} \sim \frac{R}{E_*} \sim \frac{10^{-3}}{10^4} \sim 10^{-7} \Rightarrow V \sim c \cdot 10^{-7} \sim 10^3 \frac{см}{сек}$$

Каким образом можно заставить ядра двигаться с такой скоростью, чтобы компенсировать две энергии отдачи? (чтобы было возможно резонансное поглощение)?

Мессбауэр рассматривал кристаллические решетки из химических элементов (изомеров, в частности изотопов железа) и предполагал, что при нагревании испускающей решетки линии будут сильнее перекрываться (соответственно, поглощение увеличится). Однако обнаружилось, что изначально (при малых температурах) линии практически совпадали, а при нагревании – наоборот, раздвигались.

Т.е. фотоны, которыми облучался кристалл-приемник, не получали и отдавали никакой энергии отдачи. Оказалось, что с конечной вероятностью при излучении или поглощении квантов отдача воспринимается кристаллом, как целым.

$$R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}, \quad M = NM_{я}$$ - масса всего кристалла $\rightarrow \infty \Rightarrow R \rightarrow 0$

Однако, при повышении T увеличивается вероятность, что при облучении ядро «родит» в решетке фонон; тогда энергия фотона уменьшится (на E фонона), и резонансное поглощение не будет наблюдаться.
Т.к. такая высокая добротность $\rightarrow$ очень широкое применение.

<u>Результат</u> – Нобелевская премия через 2 года.

Рассмотрим гамильтониан взаимодействия системы (α) зарядов с электромагнитной волной ($\vec{A}$ - векторный потенциал).

$$\widehat{H}_{\text{int}} = \sum_{\alpha} \frac{Q_\alpha}{c} (\widehat{\vec{\upsilon}_\alpha} \hat{\vec{A}}(\vec{r_\alpha}))$$

$$\vec{A}(\vec{r_\alpha}) = \vec{A_0} e^{i\vec{k}\vec{r_\alpha} - i\omega_k t}$$

$$\vec{r_\alpha} = \vec{R_n} + \vec{\rho_\alpha}$$

$$\overrightarrow{H_{\text{int}}} = \left\{ \sum_{\alpha} \frac{Q_\alpha}{c} (\widehat{\vec{\upsilon}_2} \vec{A_0} e^{i\vec{k}\rho_\alpha - i\omega_k t}) \right\} e^{i\vec{k}\vec{R_n}}$$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$ зависимость от положения ядра в пространстве

то, что связано с положением нуклонов в ядре;

обозначим $\overrightarrow{H_{ya}}$ (отвечает за поглощение

или испускание ядром кванта).

Считаем, что ядро испускает (поглощает) кванты; сейчас же исследуем зависимость гамильтониана от пространственного положения ядра , покоится ли, движется ли и т.п.)

$$\sum_f \left| \left\langle f \left| e^{i\vec{k}\vec{R}_n} \right| i \right\rangle \right|^2 = \sum_f \int \left\{ d\vec{R} \right\} \Phi_f^* \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) e^{i\vec{k}\vec{R}} \Phi_f \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) \int \left\{ d\vec{R} \right\} \Phi_i^* \left(\left\{ \vec{R}_1 \right\} \right) =$$

$\downarrow$

волновая функция
всего кристалла (всего
набора ядер)

$$\sum_f \Phi_f^* \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) \Phi_f \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) = \left\{ \delta \left(\vec{R} - \vec{R}_1 \right) \right\}$$ - условие полноты по всем координатам

$$= \int \left\{ d\vec{R} \right\} e^{i\vec{k}\vec{R}} \Phi_i \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) \int \left\{ d\vec{R}_1 \right\} \left\{ \delta \left(\vec{R} - \vec{R}_1 \right) \right\} e^{i\vec{k}\vec{R}_1} \Phi_i^* \left(\left\{ \vec{R}_1 \right\} \right) =$$

каждое слагаемое в этой

$$\int \left\{ d\vec{R} \right\} e^{-i\vec{k}\vec{R}} \Phi_i^* \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) = \int \left\{ d\vec{R} \right\} \left| \Phi_i \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) \right|^2 = 1 \Rightarrow$$

сумме есть вероятность перехода $i \to f$ под воздействием экспоненты.

В общем случае вероятность перехода равна $W_{i\to f} = \left| \left\langle f \left| e^{i\vec{k}\vec{R}_n} \right| i \right\rangle \right|^2$.

Вероятность реализации чисто ядерного процесса (фотон испускается ядром, а с кристаллом ничего не происходит, то есть кристалл реагирует на изменение импульса (на $\pm\hbar\overrightarrow{K})$ как целое)

$$W_0\left(\vec{k}\right) \equiv \omega_{i\to i} = \left|\left\langle i\left|e^{i\vec{k}\overrightarrow{R_n}}\right|i\right\rangle\right|^2 ; \widehat{\overrightarrow{R_n}} = \vec{n} + \widehat{\overrightarrow{U_n}}$$

$$\left\langle i\left|e^{i\vec{k}\left(\vec{n}+\widehat{u_n}\right)}\right|i\right\rangle \equiv \left\langle \{n\}\left|e^{i\vec{k}\vec{n}}e^{i\vec{k}\vec{u}_{\vec{n}}}\right|\{n\}\right\rangle = e^{i\vec{k}\vec{n}}\left\langle \{n\}\left|e^{i\vec{k}\sum\limits_{\xi}\vec{u}_{\vec{n}\xi}}\right|\{n\}\right\rangle ==$$

$$\vec{u}_{\vec{n}} = \sum_{\xi}\vec{u}_{\vec{n}\xi}$$

$$\vec{u}_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2NM\omega_\xi}}\left(\overrightarrow{l_\xi}e^{i\vec{f}\vec{n}-i\omega_\xi t}\widehat{b_\xi} + \widehat{b_\xi^+}e^{-i\vec{f}\vec{n}+i\omega_\xi t}\overrightarrow{l_\xi^*}\right)$$

$$\left(e^{\hat{A}+\hat{B}} = \begin{cases} e^{\hat{A}}\cdot e^{\hat{B}}, \text{если}\left[\hat{A}\hat{B}\right] = 0 \\ e^{\hat{A}}\cdot e^{\hat{B}}\cdot e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A}\hat{B}\right]}, \text{если}\left[\hat{A}\hat{B}\right] = C(\text{число}) \\ \text{беск.ряд......}, \text{если}\left[\hat{A}\hat{B}\right] = \hat{C}(\text{оператор}) \end{cases} \right)$$

$$=== e^{i\vec{k}\vec{n}} \left\langle \{n\} \middle| \prod_{\xi} e^{i\vec{k}\vec{u}_{\vec{n}\xi}} \middle| \{n\} \right\rangle = \prod_{\xi} \left\langle n_{\xi} \middle| e^{i\vec{k}\vec{u}_{\vec{n}\xi}} \middle| n_{\xi} \right\rangle e^{i\vec{k}\vec{n}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$

Произведение волновых функций, каждая из которых относится только к одному осциллятору

Здесь $\vec{u}_{\vec{n}\xi}$ макроскопически мало, т.к. $\sim \dfrac{1}{\sqrt{N}} \sim 10^{-12}$, тогда экспоненту можно разложить в ряд:

$$\left\langle n_{\xi} \middle| e^{i\overrightarrow{k u_{\vec{n}\xi}}} \middle| n_{\xi} \right\rangle \cong \left\langle n_{\xi} \middle| 1 + i\vec{k}\vec{u}_{\vec{n}\xi} - \frac{1}{2}\left(\vec{k}\vec{u}_{\vec{n}\xi}\right)^{2} + \ldots \middle| n_{\xi} \right\rangle \simeq$$

(Учитывать вклады выше второй степени неправомерно, т.к. в разложении волновых функций по взаимодействию мы изначально оставили только одно слагаемое второго порядка.)

$$\simeq 1\left\langle n_\xi \middle| n_\xi \right\rangle + ik^\alpha \left\langle \underbrace{n_\xi \middle| u^\alpha_{\vec{n}\xi} \middle| n_\xi}_{\parallel} \right\rangle - \frac{1}{2} k^\alpha k^\beta \left\langle n_\xi \middle| u^\alpha_{\vec{n}\xi}\, u^\beta_{\vec{n}\xi} \middle| n_\xi \right\rangle \simeq 1 - \frac{1}{2}\sum_\alpha \left(k^\alpha\right)^2 \left\langle n_\xi \middle| (u^\alpha_{\vec{n}\xi})^2 \middle| n_\xi \right\rangle +$$

0

0, если $\alpha \neq \beta$

1, если $\alpha = \beta$

$$\left\langle n_\xi \middle| e^{i\vec{k}\vec{u}_{\vec{n}\xi}} \middle| n_\xi \right\rangle = 1 - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\alpha \left(k^\alpha\right)^2}_{k^2} \cdot \frac{1}{3} \left\langle n_\xi \middle| \widehat{u_n^2} \middle| n_\xi \right\rangle = 1 - \frac{1}{2} Z_\xi(k) + \ldots,$$

$\downarrow$

предположим, что кристалл кубический (вклады квадратов смещения по всем трем осям одинаковы)

$Z_\xi(\vec{k}) = \frac{1}{3} k^2 \left\langle n_\xi \middle| u_n^2 \middle| n_\xi \right\rangle$ - точное значение этой величины мы знаем.

$$W_0(\vec{k}) \cong \left|e^{i\vec{k}\vec{n}}\right|^2 \left|\prod_\xi (1 - \frac{1}{2} Z_\xi(\vec{k}) + \dots)\right|^2 \cong 1 \cdot \left|1 - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\xi Z_\xi(\vec{k})}_{Z(\vec{k})} + \dots\right|^2 \simeq \left|1 - \frac{1}{2} Z(\vec{k}) + \dots\right|^2 \simeq \left|e^{-\frac{1}{2}Z(\vec{k})}\right|^2$$

$$W_0(\vec{k}) \equiv w_{i\to i} = \left|\left\langle i\left|e^{i\vec{k}\widehat{\vec{R}_n}}\right|i\right\rangle\right|^2 \simeq e^{-Z(E)}$$

$$Z(\vec{k}) = \frac{1}{3}k^2 \sum_\xi \overline{u_{n\xi}^2} = \frac{1}{3}k^2 \sum_\xi \frac{\hbar}{2NM\omega_\xi} \cdot 1 \cdot (2\overline{n_\xi} + 1) = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M}\right) \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \left[\underbrace{\frac{1}{3N}\sum_\xi \delta(\omega - \omega_\xi)}_{g(\omega)}\right] \frac{2\overline{n}(\omega \dots}{\hbar \dots}$$

для одноатомного кристалла

функция плотности, она нормируется на 1

Получили новую величину

$$\boxed{Z(\vec{k}) = R\int_0^{\omega_{\max}} d\omega g(\omega)\frac{2\bar{n}(\omega)+1}{\hbar\omega}}$$ - фактор Дебая-Уоллера (Валлера).

Рассмотрим разные случаи:

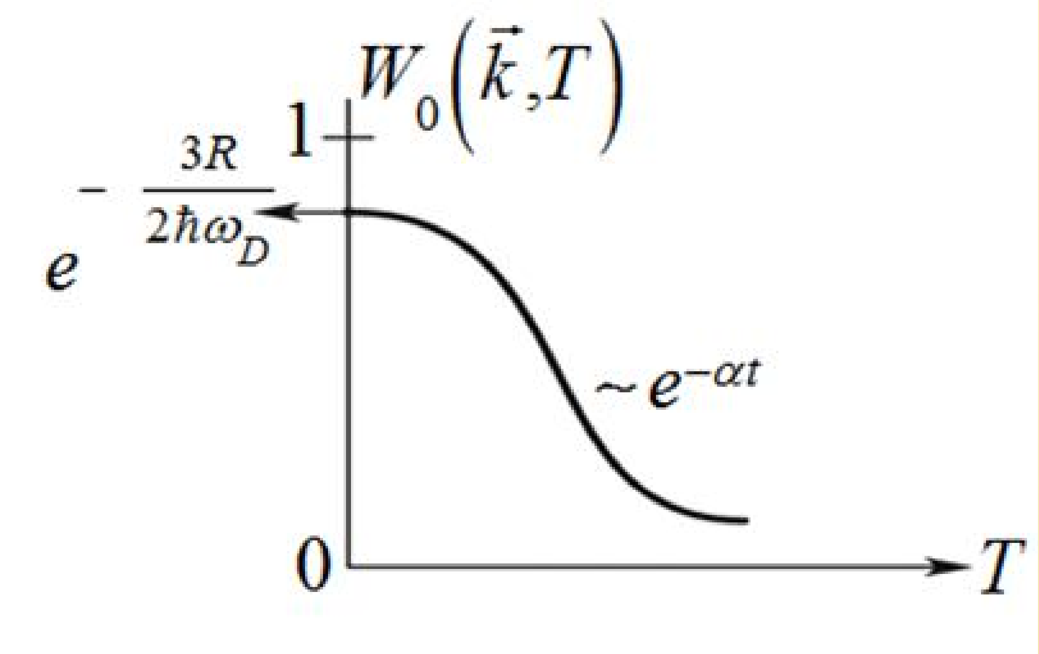
$$1) T=0 \;\Rightarrow\; \bar{n}(\omega,0)=0$$

$$Z(\vec{k},T=0) = R\int_0^{\omega_{\max}} d\omega g(\omega)\frac{0+1}{\hbar\omega} = R\frac{1}{\hbar}\left\langle\frac{1}{\omega}\right\rangle$$ для трехмерного случая.

$$\left\langle\frac{1}{\omega}\right\rangle = \int_0^{\omega_{\max}} d\omega g(\omega)\frac{1}{\omega} \rightarrow \left\langle\frac{1}{\omega}\right\rangle_D = \int_0^{\omega_D} d\omega\frac{3\omega^{\cancel{2}}}{\omega_D^3}\cdot\frac{1}{\cancel{\omega}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\omega_D}$$

Таким образом,

$$\boxed{Z(\vec{k},T=0)\approx\frac{3R}{2\hbar\omega_D}=\frac{3}{4}\frac{\hbar^2k^2}{M\hbar\omega_D}=\frac{3}{4}\frac{E_k^2}{\hbar\omega_D Mc^2}}$$



$$1=\sum_f \omega_{i\to f}$$

$$w_{i\to i}\equiv W_0=1-\sum_{f\neq i} w_{i\to f}<1$$

$$\Rightarrow \sum_{f\neq i} w_{i\to f} \neq 0 \quad !$$

Единственная возможность – если ядро будучи «стукнутым» импульсом $\hbar\vec{k}$, родит фонон. Тогда произойдет неупругий процесс в кристалле: начальное и конечное состояния не будут совпадать $\left(f \neq i \right)$

$$W_{исп} \sim N+1$$

в роли N выступают «фононные» кванты, у нас

$$W_{погл} \sim N$$

$T=0 \Rightarrow N=0$, остается только возможность испускания.

Чтобы упростить наблюдение, необходимо $W_0 \to 1$, т.е.

$$\frac{3R}{2\hbar\omega_D} \to 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 1) E_\gamma \to 0 \\ 2) M \to \infty \\ 3) \omega_D \to \infty \end{cases}$$ -- жесткие кристаллы.

$$2)T\sim 0\ \ (\textit{мало}, \textit{но} \neq 0)$$

$$2\bar{n}(\omega, T\sim 0)+1\approx 2\frac{kT}{\hbar\omega}$$

$$Z\left(\vec{k}, T\sim 0\right)\simeq R\frac{2kT}{\hbar^2}\int_0^{\omega_{\max}} d\omega g(\omega)\frac{1}{\omega^2}=R\frac{2kT}{\hbar^2}\left\langle\frac{1}{\omega^2}\right\rangle$$

$$\left\langle\frac{1}{\omega^2}\right\rangle\to\left\langle\frac{1}{\omega^2}\right\rangle_D=\int_0^{\omega_D} d\omega\frac{3\cancel{\omega}^2}{\omega_D^3}\frac{1}{\cancel{\omega}^2}=\frac{3}{\omega_D^3}$$

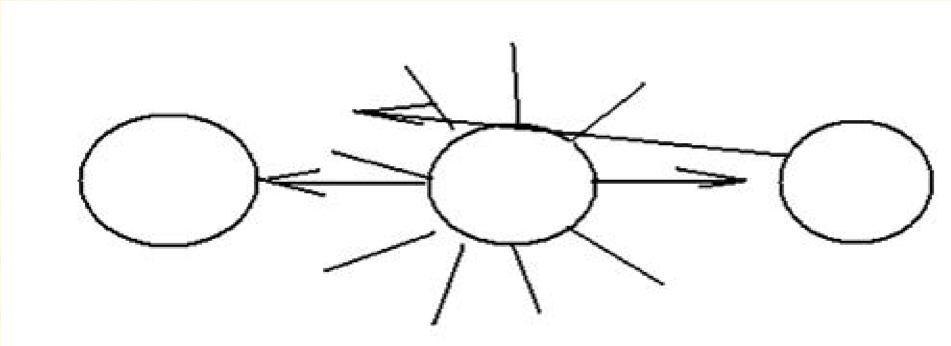
$$Z\left(\vec{k}, T\sim 0\right)\sim\frac{2kTR}{\hbar^2\omega_D^2}\cdot 3\equiv\alpha T$$

($\uparrow$ обозначили).

$T\neq 0\to N\neq 0$ - «упругая» вероятность уменьшается.

$$W_0=1-\sum_{i\neq f} w_{i\to f}$$

Красное смещение частоты фотонов в неоднородном гравитационном поле

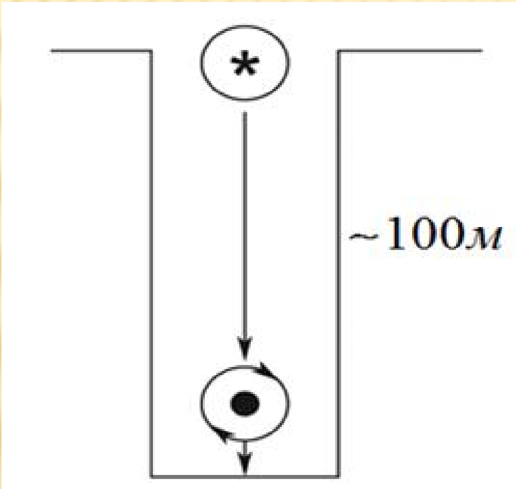


Земля Солнце Меркурий

Отраженный фотон, попавший на Землю, пролетает через гравитационное поле Солнца.

Опыт

Паунд, Репка



кристалл:
ядра в основном состоянии

Совпадение результата с результатом общей теории относительности ~ 99,9%

Если фотон при «падении» изменит свою частоту, он уже не поглотится. Этого можно добиться сдвигая кристалл-поглотитель.